

Diofanto di Alessandria

ARITMETICA

Carmine Suriano

- **Cosa è l'Aritmetica**
- **Aritmetica determinata**
- **Aritmetica indeterminata (diofantea)**
- **Altri numeri**
- **Aritmetica superiore**
- **Nel tempo**

L'Aritmetica

Le quattro operazioni

- **Addizione**
- **Sottrazione**
- **Moltiplicazione**
- **Divisione**

$$a + b = c$$

$$a - b = c$$

$$a = b + c$$

$$a \times n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ volte}}$$

$$a \div b = c$$

$$a = b \times c$$

Esiste una sola operazione

L'ADDIZIONE

L'Aritmetica determinata

La somma di due numeri è 100
La loro differenza è 20

La media è 50

Un numero sarà $50 + x$ l'altro $50 - x$

La differenza è $2x = 20$

$$x = 10$$

La media è 50

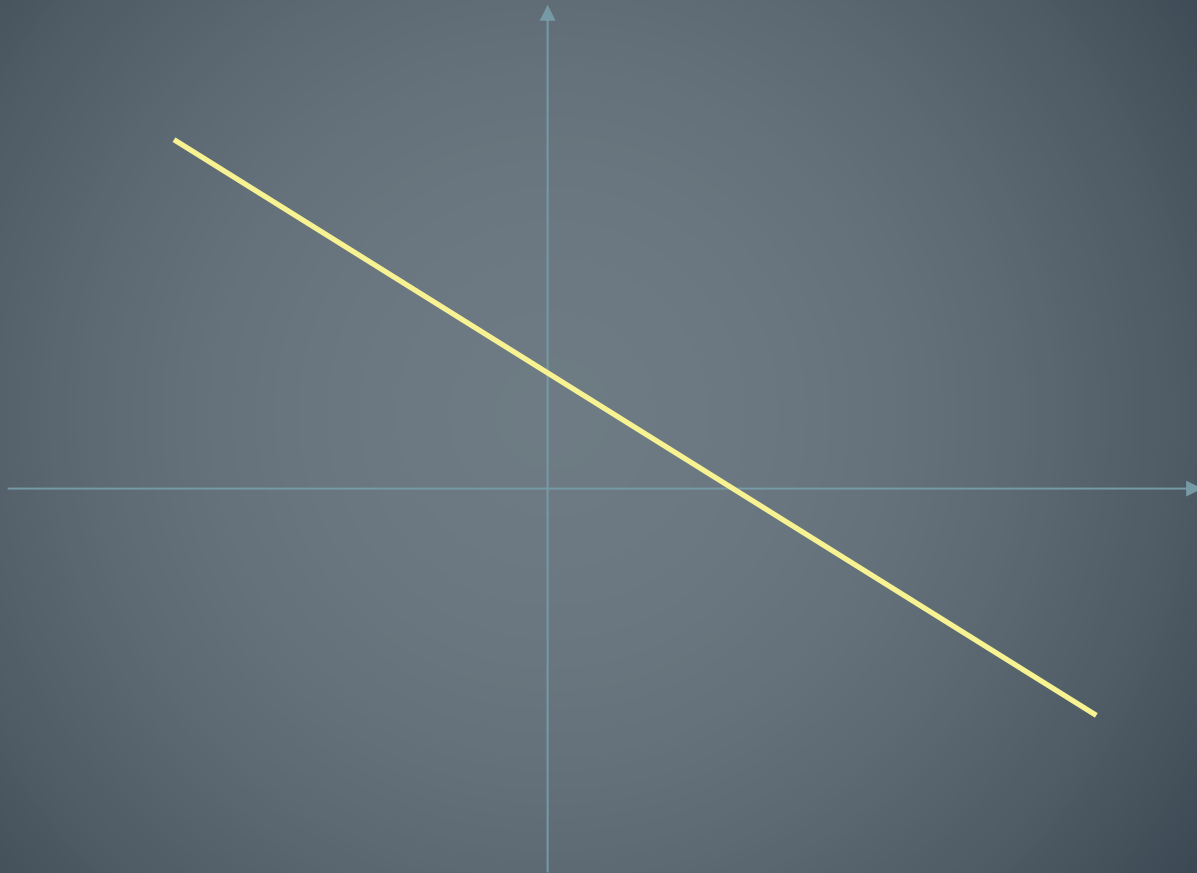
Un numero sarà 60 l'altro 40

L'Aritmetica indeterminata

La somma del doppio di un numero
e del triplo di un altro fa 11

$$2x + 3y = 11$$

La retta $2x + 3y = 11$



Cerchiamo punti a coordinate intere

$$2x + 3y = 11$$

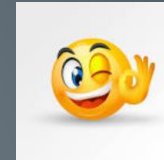
$$2x + 4y = 11$$

$$***Px + Qy = 1***$$

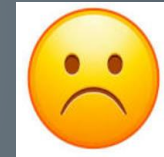
$$Px + Qy = 1$$

L'equazione ammette soluzioni
se e solo se
 $\text{mcd}(P, Q) = 1$

$$2x + 3y = 1$$

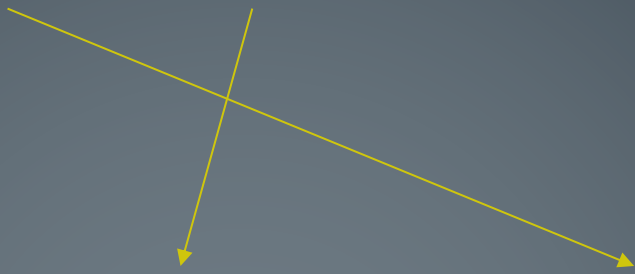


$$2x + 4y = 1$$



$$x = -1 + 3k; y = 1 - 2k$$

$$2x + 3y = 11$$


$$x = -11 + 3k; y = 11 - 2k$$

$$k = 0 \rightarrow x = -11, y = 11$$

$$k = 1 \rightarrow x = -8, y = 9$$

$$k = 2 \rightarrow x = -5, y = 7$$

$$k = 4 \rightarrow x = 1, y = 3$$

$$k = 5 \rightarrow x = 4, y = 1$$

L'equazione di Pitagora

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{u}{v}\right)^2$$

Moltiplico per $(bdv)^2$

$$(adv)^2 + (cbv)^2 = (ubd)^2$$

$$(x)^2 + (y)^2 = (z)^2$$

$$\begin{cases} y = \frac{m}{n}(z - x) \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{m}{n}(z - x) \\ x^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 (z^2 - 2xz + x^2) = z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{m}{n}(z - x) \\ x^2 \left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right) - 2\frac{m^2}{n^2}xz + z^2 \left(\frac{m^2}{n^2} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

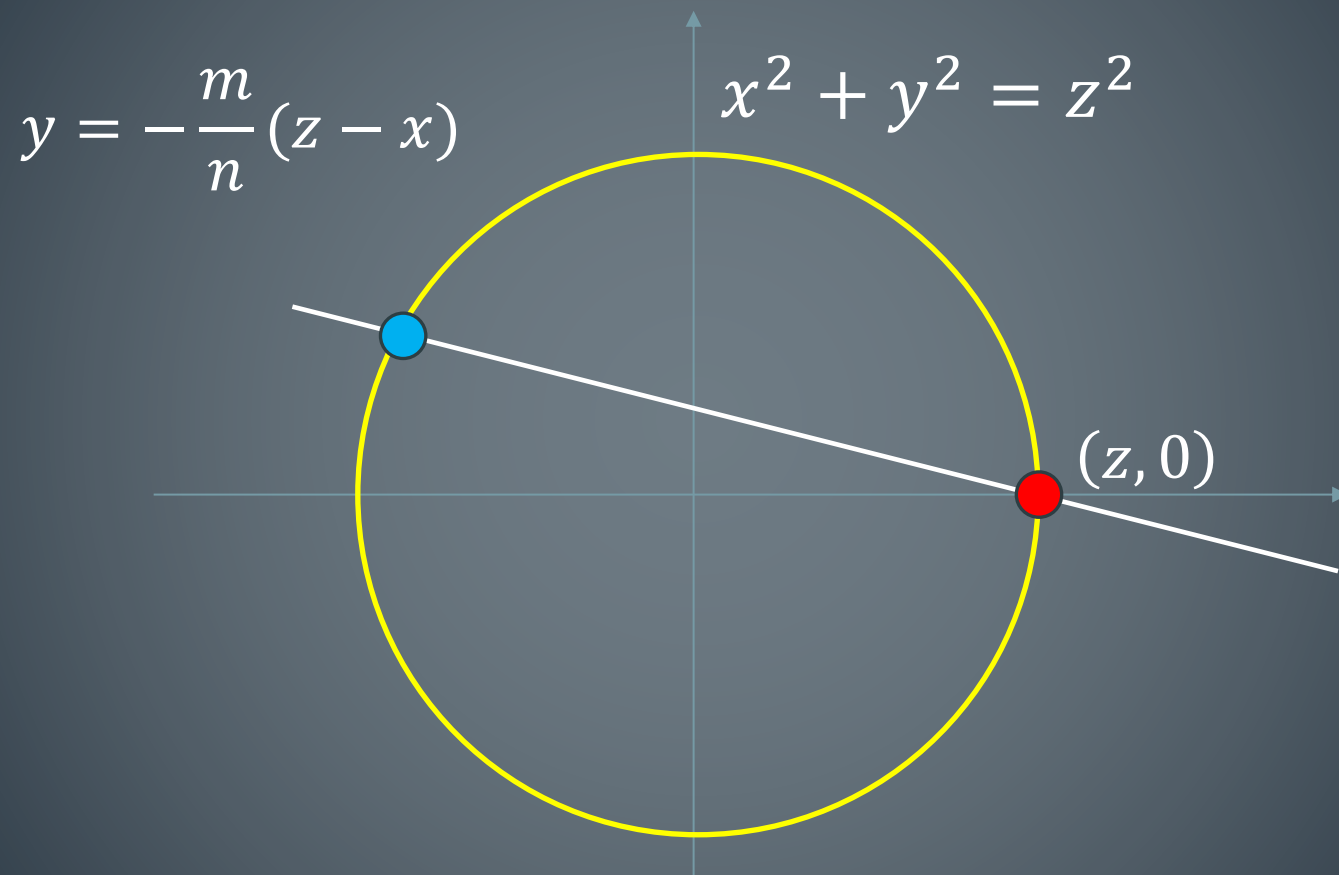
$$\begin{cases} y = \frac{m}{n}(z - x) \\ x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \right) z = \frac{2mn}{m^2 + n^2} z \\ x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} z \end{cases}$$

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}z, \frac{2mn}{m^2 + n^2}z, z$$

Moltiplico per $z = m^2 + n^2$ e otteniamo la
soluzione generale dell'equazione di Pitagora

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$



$$x = m^2 - n^2, y = 2mn$$

Trovare tutti i triangoli rettangoli nei quali l'ipotenusa supera di **una** unità il cateto maggiore

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

$$m^2 + n^2 - 2mn = 1$$

$$(m - n)^2 = 1$$

$$m = n + 1$$

$$x = 2n + 1, y = 2n^2 + 2n, z = 2n^2 + 2n + 1$$

$$(3, 4, 5)$$

$$(5, 12, 13)$$

$$(7, 24, 25)$$

$$(9, 40, 41)$$

$$(11, 60, 61)$$

$$z = (n + 1)^2 + n^2$$

Forme quadratiche

$$x^2 + y^2 = n$$

Quali numeri naturali sono esprimibili come somma di due quadrati?

	0	1	4	9
0				
1				
4				
9				

Quali numeri naturali sono esprimibili come somma di due quadrati?

+	0	1	4	9
0	0	1	4	9
1	1	2	5	10
4	4	5	8	13
9	9	10	13	18

Consideriamo i resti dei quadrati rispetto alla divisione per il modulo 4

$$(4k - 1)^2 = 4 \times 4k^2 - 4 \times 2k + \mathbf{1}$$

$$(4k)^2 = 4 \times 4k^2 + \mathbf{0}$$

$$(4k + 1)^2 = 4 \times 4k^2 + 4 \times 2k + \mathbf{1}$$

$$(4k + 2)^2 = 4 \times 4k^2 + 4 \times 4k + 4 + \mathbf{0}$$

I resti dei quadrati rispetto alla divisione per il modulo 4 sono solo due: 0 e 1

+	0	1
0	0	1
1	1	2

I resti possibili della somma sono tre: 0, 1, 2

Quindi le possibili somme di due quadrati sono

$$x^2 + y^2 = 4 \times m + \mathbf{0}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \times m + \mathbf{1}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \times m + \mathbf{2}$$

Un numero naturale che ha il fattore della forma $\mathbf{4m + 3}$ presente un numero dispari di volte non può essere espresso come somma di due quadrati

$$1714 = 2 \times 857$$

$$1714 = 25^2 + 33^2$$

$$245 = 5 \times 7^2$$

$$245 = 14^2 + 7^2$$

$$1715 = 5 \times 7^3$$

$$1714 = 2 \times 857$$

$$1714 = 25^2 + 33^2$$

$$245 = 5 \times 7^2$$

$$245 = 14^2 + 7^2$$

$$1715 = 5 \times 7^3$$

Equazioni doppie

Siano dati due numeri a, b ; trovare un numero che, sommato a ciascuno, dia un quadrato

Ammettono infinite soluzioni razionali

$$\begin{cases} x + a = r^2 \\ x + b = s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 1 = r^2 \\ x + 2 = s^2 \end{cases}$$

$$s^2 - r^2 = 1$$

$$(s + r)(s - r) = 1$$


 α

 $\frac{1}{\alpha}$

$$\begin{cases} x + 1 = r^2 \\ x + 2 = s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s + r = \alpha \\ s - r = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

$$s = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right); \quad r = \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$x = r^2 - 1 = \frac{1}{4} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)^2 - 1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \right)^2 - 1$$

$$\alpha = 2 \rightarrow x = \frac{1}{4} \times \frac{9}{4} - 1 = -\frac{7}{16}$$

$$\begin{cases} x + 1 = r^2 \\ x + 2 = s^2 \end{cases}$$

$$-\frac{7}{16} + 1 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$-\frac{7}{16} + 2 = \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

L'equazione di Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

Ammette infinite soluzioni intere se D non è un quadrato

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Essa ammette la soluzione $x = 3, y = 2$

Tutte le altre soluzioni si possono trovare in due modi

$$(x - \sqrt{D}y)^m$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ Dy & x \end{bmatrix}^m$$

$$(x - \sqrt{D}y)^m$$

$$(3 - 2\sqrt{2})^2$$

$$9 + 8 - 12\sqrt{2} \quad \longrightarrow \quad (17, 12)$$

$$17^2 - 2 \times 12^2 = 289 - 288 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ Dy & x \end{bmatrix}^m$$

$$\det \begin{bmatrix} x & y \\ Dy & x \end{bmatrix} = x^2 - Dy^2 = 1$$

$$\det \begin{bmatrix} x & y \\ Dy & x \end{bmatrix}^m = 1$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ Dy & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 \times 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 17 & 12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 99 & 70 \\ 140 & 99 \end{bmatrix}$$

$$\frac{99}{70} = 1.414285714285714$$

Il problema dei buoi

Calcola accuratamente il numero che compone la mandria di Elios nella Sicilia trinacria e che è composto da quattro armenti di colore diverso: uno di colore bianco come il latte, un altro di colore grigio, il terzo rosso, l'ultimo pezzato. Il numero dei tori e delle vacche di ogni gregge è tale che devono essere vere alcune condizioni [sette]. Amico, se troverai tutte le quantità di tori e vacche sarai ritenuto non inesperto nella conoscenza dei numeri, ma non potrai essere annoverato tra i sapienti, a meno che non scoprirai quanti essi sono quando, unendo il numero di tori bianchi e grigi, questi formeranno una compagine compatta, larga quanto lunga ed inoltre unendo i rossi con i pezzati si formerà una figura triangolare. Allora sarai coperto di gloria e ritenuto sapiente

Πρόβλημα,

ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὐρων τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἑρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

- 1 Πληθὺν Ἑλλίοιο βοῶν, ὃ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελίης ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῇ στίφει δασσαμένη
5 χροίην ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυνέφ' δ' ἔτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. ἐν δὲ ἐκάστῳ
στίφει ἔσαν ταύροι πληθῆσσι βριθόμενοι
συμμετρίας τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
10 κυνέων ταύρων ἡμίσει ἤδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὃ ξεῖνε, νόησον,
αὐτὰρ κυνέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσι τε πᾶσιν
τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωστας ἄθρει
15 ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἐβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτίς πᾶσιν ἰσαζόμενους.
Θηλείαισι δὲ βουσί τὰδ' ἐπλετο· λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπαῖσης κυνέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρικῆς ἴσαι·
20 αὐτὰρ κυνέαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις· πάσης δ' εἰς νομὸν ἐρχομένης
ξανθοτρίχων ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσαριθμοὶν πληθὸς ἔχον τετραχῇ.
25 ξανθαὶ δ' ἠριθμεύντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἴσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἐβδομάτῳ τε μέρει.
ξεῖνε, σὺ δ' Ἑλλίοιο βοῶν πόσαι ἀτρικῆς εἰκῶν,
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφίων ἀριθμόν,
χωρὶς δ' αὐθῆλαι οἶσαι κατὰ χρῶμα ἕκασται,
30 οὐκ ἄιδρῆς κε λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μὴν πῶ γε σοφοῖς ἐναριθμός. ἀλλ' ἴθι φράξεν
καὶ τὰδε πάντα βοῶν Ἑλλίοιο κάθη.
ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μάλιστα πληθύν
κυνέοις, ἴσταντ' ἐμπεδον ἰσόμετροι
35 εἰς βάθος εἰς εὐρύς τε, τὰ δ' αὐτοῖς περιμήκεια πάντη
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδίᾳ.
ξανθοὶ δ' αὐτ' εἰς ἔν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἴσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τριχράσπεδον οὔτε προσόντων
40 ἄλλοχρόων ταύρων οὔτε ἐπιλειπομένων.
ταῦτα συνεξευρών καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
καὶ πληθύν ἀποδοὺς, ὃ ξεῖνε, πάντα μέτρα
ἔρχο κυδιῶν νικηφόρος, ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ ὁμπνιος ἐν σοφίῃ.

Il problema dei buoi

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) B + Y \\ B = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) D + Y \\ D = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + Y \\ w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (B + b) \\ b = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (D + d) \\ d = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (Y + y) \\ y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (W + w) \end{array} \right.$$

$$\alpha^2 - 4729494\beta^2 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W = 1.5965108 \\ B = 1.1489713 \\ Y = 0.6390346 \\ D = 1.1331927 \\ w = 1.1098298 \\ b = 0.7535941 \\ y = 0.8376768 \\ d = 0.5414608 \end{array} \right. \cdot 10^{206544}$$

$$x^3 + y^3 = z^3$$

$$x^p + y^p = z^p$$

L'Ultimo Teorema di Fermat.

$$x^2 + 2 = z^2$$

$$z = x + m$$

$$x^2 + 2 = x^2 + 2mx + m^2$$

$$2 = 2mx + m^2$$

$$2 - m^2 = 2mx$$

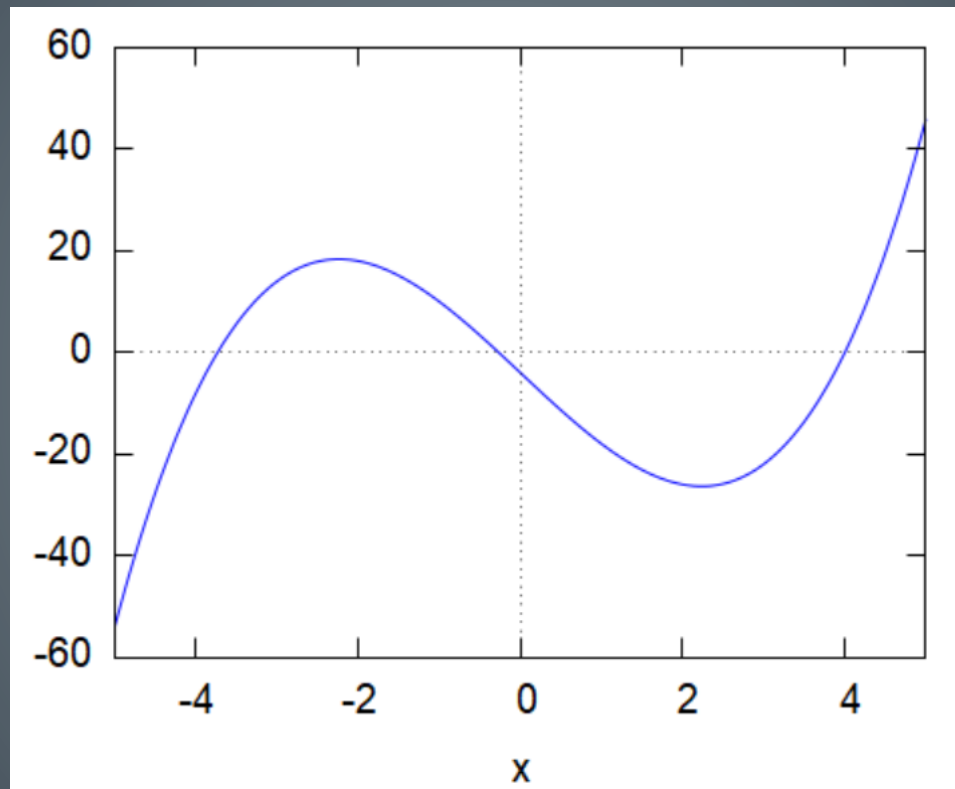
$$\frac{2 - m^2}{2m} = x$$

$$\left(\frac{2 - m^2}{2m}\right)^2 + 2 = \left(\frac{2 + m^2}{2m}\right)^2$$

Altri numeri

$$x = 4$$

$$x^3 - 15x = 4$$



$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-121}}$$

Poniamo quale definizione $i^2 = -1 \leftrightarrow i = \pm\sqrt{-1}$

$$x = \sqrt[3]{-2 + 11i} - \sqrt[3]{-2 - 11i} = 4$$

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a + ib)(a - ib)(c + id)(c - id)$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a + ib)(c - id)(c + id)(a - ib)$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$a = c, b = d \rightarrow (a^2 + b^2)^2 = (2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2$$

Poniamo quale definizione $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(A^2 + B^2 + C^2) = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \\ = X^2 + Y^2 + W^2 + Z^2$$

$$X = aA + bB + cC + dD$$

$$Y = aB - bA - cD + dC$$

$$W = aC + bD - cA - dB$$

$$Z = aD - bC + cB - dA$$

Altri problemi

Altri problemi

A due numeri dati sottrarre il medesimo numero in maniera tale che ciascuna somma sia un quadrato.

Trovare due numeri tali che il quadrato di uno sommato all'altro faccia un quadrato.

Trovare tre numeri tali che il quadrato di ciascuno diminuito del successivo faccia un quadrato.

Trovare due numeri il cui prodotto, o aumentato o diminuito della loro somma dia un cubo.

L'Aritmetica Superiore

Aree di studio

Teoria della divisibilità

Distribuzione dei numeri primi

Aritmetica modulare

Forme quadratiche

Divisione del cerchio

Nel tempo

1225: il *Liber quadratorum* di Leonardo Pisano

XVII sec.: Pierre de Fermat

XVIII sec.: Leonhard Euler, Luigi Lagrange

XIX sec.: Adrien Legendre, Carl Gauss, Gustav Dirichlet

XX sec.: Godfrey Hardy, André Weil

Per finire ...

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$36 [5], 55 [6], 78 [7], 105 [8] \dots$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 117 + 119 = 120 + 122 + \dots + 168 = 3600$$

$$17650^2 + 38125^2 = 1765038125$$

$$296^3 + 584^3 + 415^3 = 296584415$$

$$32043^2 = 1026753849$$

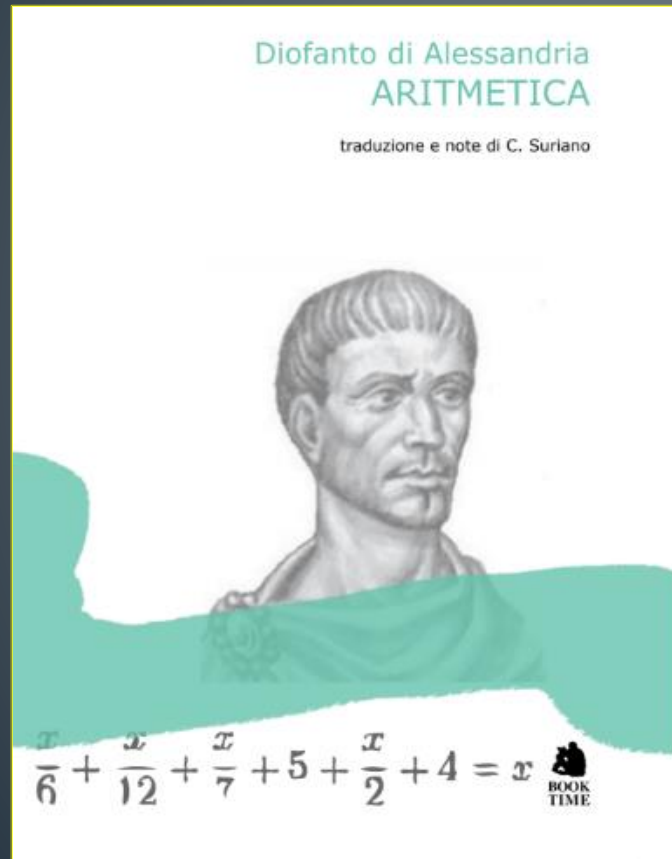
$$3179313^3 = 32136594845860017297$$

$$319915112031228^2 = 102345678905953162236047187984$$

$$2985984^3 + (-2628072)^3 + (-357911)^3$$

DIOFANTO, *III sec. d.C.*

**La prima traduzione
integrale in Italiano**



Grazie per l'attenzione